Las foliaciones minimales Følner son promediables*

Fernando Alcalde Cuesta
Universidade de Santiago de Compostela

Ana Rechtman
Northwestern University

✓ La noción de *grupo promediable* se debe a von Neumann, quien la introdujo en 1929, pero el problema de la existencia de promedios invariantes se remonta a los trabajos de Lebesgue, quien años antes formuló la cuestión de la existencia de una medida aditivamente finita e invariante por traslaciones sobre $\mathbb{R}$. En 1955, Følner demostró que un grupo finitamente generado G es *promediable* si y sólo si

$$\inf_F \frac{|\partial F|}{|F|} = 0$$

siendo F un subconjunto finito de G, $|F|$ su número de elementos y $\partial F = \{g \in F / \exists h \in H : hg \notin F\}$ su borde respecto de un sistema finito de generadores H. Si G cumple esta condición, se dice *Følner*.

✓ Ambas condiciones son fáciles de extender a una variedad foliada compacta $(M, \mathcal{F})$ recubierta por abiertos distinguidos $U_i \cong P_i \times T_i$. Si $\mathcal{F}$ admite una *medida transversa invariante* ν (una medida sobre $T = \bigsqcup T_i$ que no varía al deslizarla a lo largo de las hojas), podemos combinarla con el volumen (riemanniano) de las hojas y obtener una medida μ sobre M, que diremos *completamente invariante*. La foliación $\mathcal{F}$ se dice

– *promediable* si existe una sucesión de sistemas medibles $\pi_n = \{\pi_n^p\}_{p \in M}$ de medidas de probabilidad π_n^p definidas sobre las hojas L_p que contienen a p tales que $\|\pi_n^p - \pi_n^q\| \to 0$ para μ-casi todo $p \in M$ y todo $q \in L_p$.

– *Følner* si la hoja L_p contiene una sucesión de dominios compactos F_n^p tales que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{vol}(\partial F_n^p)}{\mathrm{vol}(F_n^p)} = 0$$

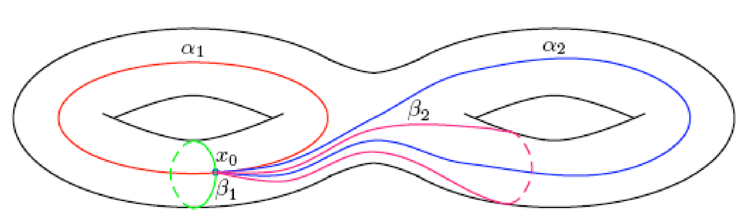
para μ-casi todo $p \in M$.

✓ En contra de una idea bastante extendida, Kaimanovich demostró en [4] que hay relaciones de equivalencia medibles que son Følner, pero no promediables. Nuestro propósito es describir brevemente dos ejemplos de foliaciones de clase C^∞ con esa misma propiedad [1]. Indicaremos además cómo probar el siguiente resultado de [1] (que responde afirmativamente a una cuestión planteada en [4]):

Teorema 1. *Sea $(M, \mathcal{F})$ una varieda foliadad compacta. Supongamos que $\mathcal{F}$ es minimal (i.e. con hojas densas) y sin holonomía esencial respecto de una medida transversa invariante. Entonces $\mathcal{F}$ es promediable si y sólo si es Følner.*

Ejemplos

✓ Como paso previo a la construcción de los ejemplos, llamamos Σ_2 a la superficie compacta y orientable de género 2 cuyo grupo fundamental está generado por las clases de los lazos α_1, β_1, α_2, β_2 de la siguiente figura:



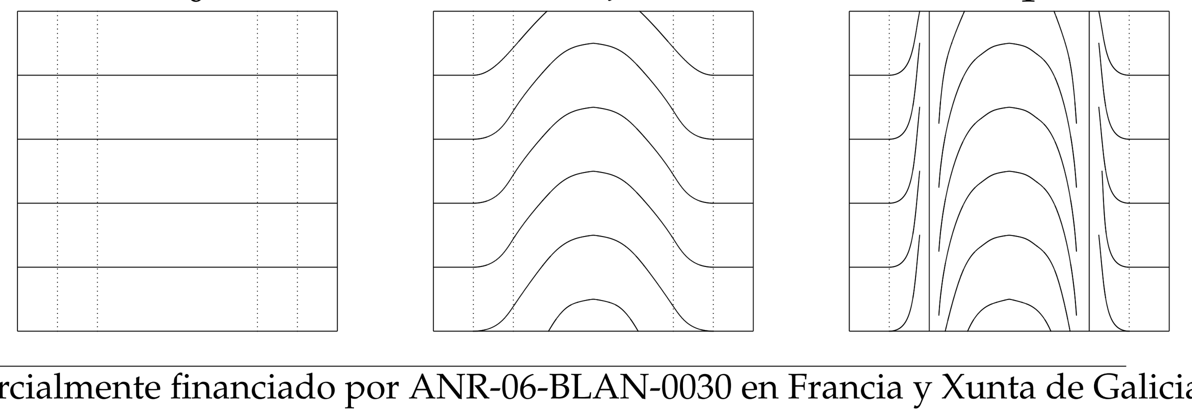
✓ *La variedad $M = \Sigma_2 \times T^2$ posee una foliación Følner y no promediable respecto de una medida transversa invariante finita.*

Llamemos $\mathcal{F}_1$ a la foliación no promediable sobre $M = \Sigma_2 \times T^2$ obtenida por suspensión de la representación $h : \pi_1(\Sigma_2) \to SL(2, \mathbb{Z})$ dada por

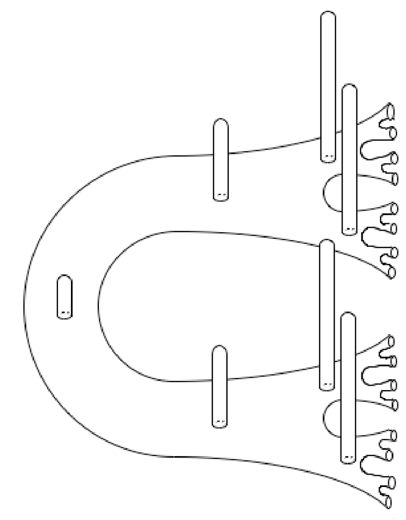
$$h([\alpha_1]) = h([\alpha_2]) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad h([\beta_1]) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad h([\beta_2]) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Respecto al volumen usual de $T = \{x_0\} \times T^2$, las hojas genéricas son casi-isométricas al *árbol de Cantor*, i.e. la superficie orientable de género nulo con un Cantor de finales. Fijemos un entorno tubular $P \cong D^2 \times T^2$ de T y sustituyamos la foliación $\mathcal{F}_1|_P$ por la foliación $\mathcal{H}_P$ que se obtiene doblando la *foliación de Reeb* $\mathcal{H}$ sobre $D^2 \times S^1 \times [0,1]$ con coordenadas (r, ψ, θ, t). La foliación $\mathcal{H}_0$ sobre $D^2 \times S^1$ definida por la ecuación $d\theta = 0$ se deforma en una familia de foliaciones isótopas $\mathcal{H}_t$ usando un campo $X_t = (\partial f_t / \partial t) \partial / \partial \theta$ y funciones adecuadas $f_t : [-1,1] \to [0, +\infty)$ de clase C^∞. Para cada $t \in [0,1]$, definimos $\mathcal{H}|_{D^2 \times S^1 \times \{t\}} = \mathcal{H}_t$. Eligiendo bien las funciones f_t, se puede construir una foliación de Reeb $\mathcal{H}$ con una medida transversa invariante finita.

$\mathcal{H}_0$ $\mathcal{H}_t$ $\mathcal{H}_1$



Si llamamos $\mathcal{F}$ a la foliación sobre $M = \Sigma_2 \times T^2$ obtenida sustituyendo la foliación $\mathcal{F}_1|_P$ por la foliación de Reeb $\mathcal{H}_P$, entonces casi todas las hojas de $\mathcal{F}$ son casi-isométricas a la superficie de la figura y contienen discos de diámetro no acotado y borde de longitud constante. La foliación $\mathcal{F}$ posee una hoja tórica e infinitas hojas compactas hiperbólicas.

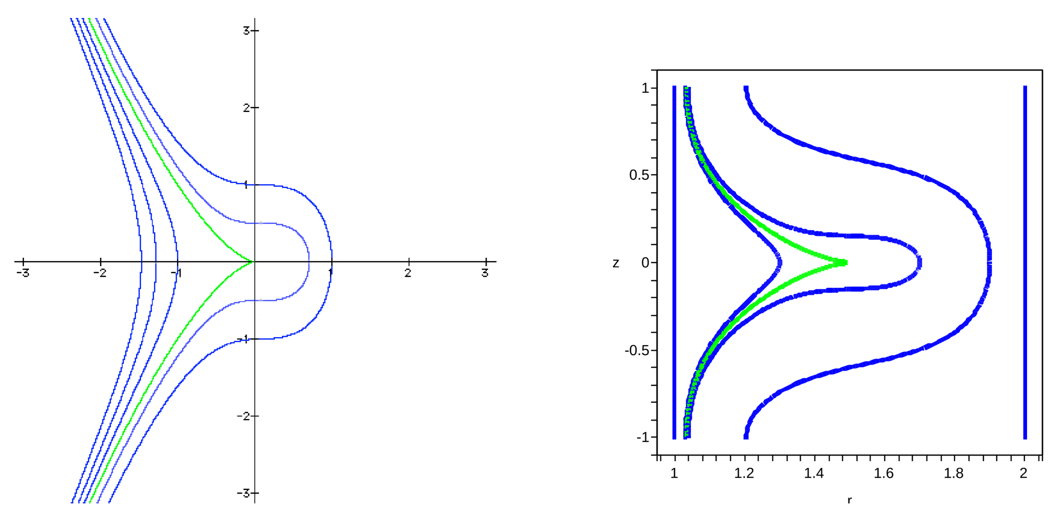


✓ *La variedad $M = \Sigma_2 \times S^2$ posee una foliación Følner y no promediable respecto de un volumen transverso invariante.*

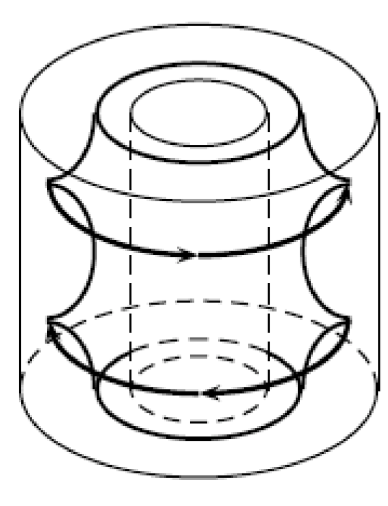
Ahora llamemos $\mathcal{F}_1$ a la suspensión sobre $M = \Sigma_2 \times S^2$ de una representación $h : \pi_1(\Sigma_2) \to SO(3)$ que envíe los generadores $[\alpha_1]$ y $[\alpha_2]$ en I y los generadores $[\beta_1]$ y $[\beta_2]$ en dos transformaciones elípticas que generen un grupo kleiniano de primera especie. Como antes, gracias a una idea de Ghys, implantaremos sucesiones de Følner en las hojas genéricas usando una trampa de Wilson que conserve el volumen. Sea $Z = -2z\frac{\partial}{\partial r} + 3r^2\frac{\partial}{\partial z}$ el campo Hamiltoniano definido por la función $\zeta(r,z) = r^3 + z^2$. Para encajarlo en el rectángulo $R = [1,2] \times [-1,1]$, sustituimos ζ por

$$h(r,z) = (r - \frac{3}{2})^3 + (z^2 - \frac{1}{2}z^4)g(r),$$

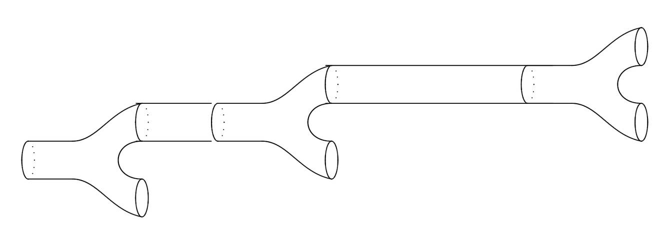
siendo g una función C^∞ tal que $3(r - \frac{3}{2})^2 + (z^2 - \frac{1}{2}z^4)g'(r) > 0$ si $(r,z) \neq (\frac{3}{2}, 0)$ y $g(r) = 0$ si $r \approx 1,2$. Llamamos H al nuevo campo Hamiltoniano.



Sea $Y = H + f\frac{\partial}{\partial \theta}$ el campo sobre $P = S^1 \times R$ determinado por una función $f : R \to [0, +\infty)$ de clase C^∞, positiva en $(\frac{3}{2}, 0)$ y nula cerca de ∂R. Es un campo non singular con una única órbita periódica que conserva el volumen. Pegando una copia con su imagen especular, obtenemos una *trampa de Wilson* X sobre P que conserva el volumen. Esta trampa se extiende trivialmente a $S^2 \times [-1,1]$. Consideremos el producto $B \cong S^1 \times [-1,1] \times S^2$ de un entorno tubular $A \cong S^1 \times [-1,1]$ del lazo β_1 por S^2 y sustituyamos la foliación $\mathcal{F}_1|_B$ por el producto del campo X sobre $S^2 \times [-1,1]$ por S^1. La nueva foliación $\mathcal{F}$ sigue poseyendo un volumen transverso invariante, pero las hojas genéricas contienen cilindros cada vez más largos.



✓ Si $\mathcal{F}$ es minimal, ninguno de estos tipos de sucesiones de Følner es posible.



Foliaciones minimales

✓ Según [2], si $\mathcal{F}$ es minimal, cualquier hoja L es *casi-homogénea*, i.e. existe $k \geq$ tal que, para cualquier bola $B(p,a)$ y cualquier punto $q \in L$, hay una inmersión $f : B(p,a) \to B(q,A)$ con dilatación $\leq k$. Esto permite construir dominios F_n^p y corrientes de integración π_n^p tales que $\|\pi_n^p - \pi_n^q\| \to 0$.

✓ Si μ es una medida armónica, que siempre existe, hay que modificar volumen y razón isoperimétrica usando la forma modular η de μ:

Teorema 2. *En las condiciones anteriores, $\mathcal{F}$ es promediable respecto de una medida armónica μ si y sólo si es η-Følner.*

Referencias

[1] F. Alcalde Cuesta, A. Rechtman, Minimal Følner foliations are amenable. Submitted for publication in *Discrete and Continuous Dynamical Systems*.

[2] D. M. Cass, Minimal leaves in foliations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **287** (1985), 201–213.

[3] V. A. Kaimanovich, Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **325** (1997), 999–1004.

[4] V. A. Kaimanovich, Equivalence relations with amenable leaves need not be amenable. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **202** (2001) 151–166.

*Trabajo parcialmente financiado por ANR-06-BLAN-0030 en Francia y Xunta de Galicia INCITE08E1R207051ES en España.