

Hilorama del politopo E8

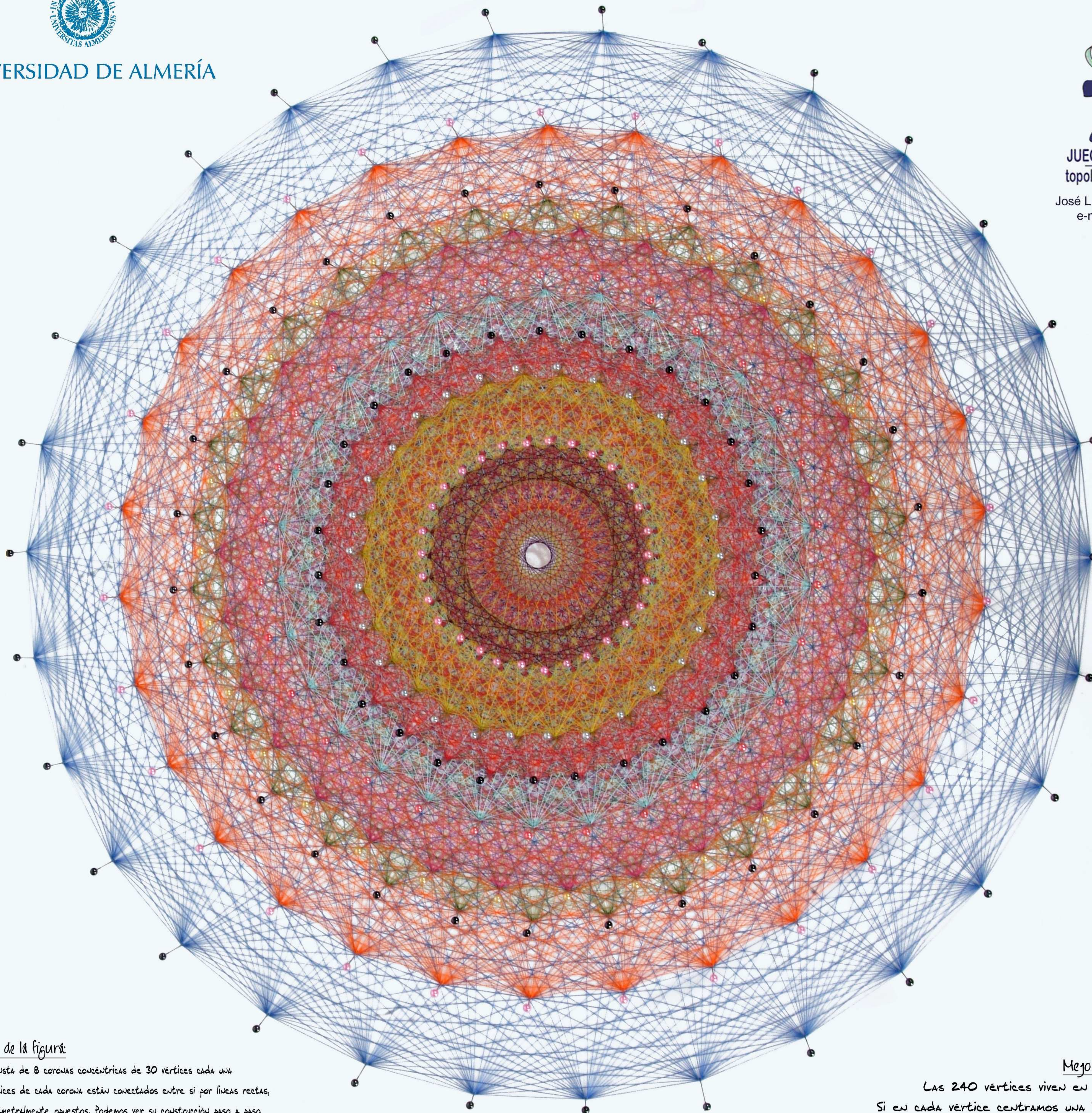


UNIVERSIDAD DE ALMERÍA



JUEGOS TOPOLÓGICOS
topologia.wordpress.com

José Luis Rodríguez Blancas
e-mail: jlrodri@ual.es



Descripción de la figura:

Esta figura consta de 8 coronas concéntricas de 30 vértices cada una donde los vértices de cada corona están conectados entre sí por líneas rectas, excepto los diametralmente opuestos. Podemos ver su construcción paso a paso en las fotografías de abajo. Nuestra construcción reproduce una imagen de ordenador obtenida por John Stembridge, que está basada en otra dibujada a mano por Peter McMullen de 1960.

El politopo E8:

Esta figura es una proyección plana del politopo E8, un politopo convexo semi-regular que vive en un espacio de 8 dimensiones. Los 240 vértices se obtienen a partir de

$$(\pm 1, \pm 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$$

colocando 1 o -1 en dos lugares distintos, dando $112 = 2^2 \cdot 7$ vértices, que están situados en todos los planos coordenados.

De la segunda forma tomamos aquellos que tienen un número par de signos menos, en total hay $128 = 2^7$.

Este politopo tiene 6720 aristas: cada vértice se conecta a otros 56 más cercanos a distancia $\sqrt{2}$ (observar que $6720 = 56 \times 240/2$).

Al igual que el borde de un poliedro 3-dimensional está formado por caras 2-dimensionales, el borde de este politopo se descompone en 19.440 caras 7-dimensionales:

17.280 son 7-simplices, y 2.160 son politopos E7 (ambos se pueden representar de forma plana con hilos).

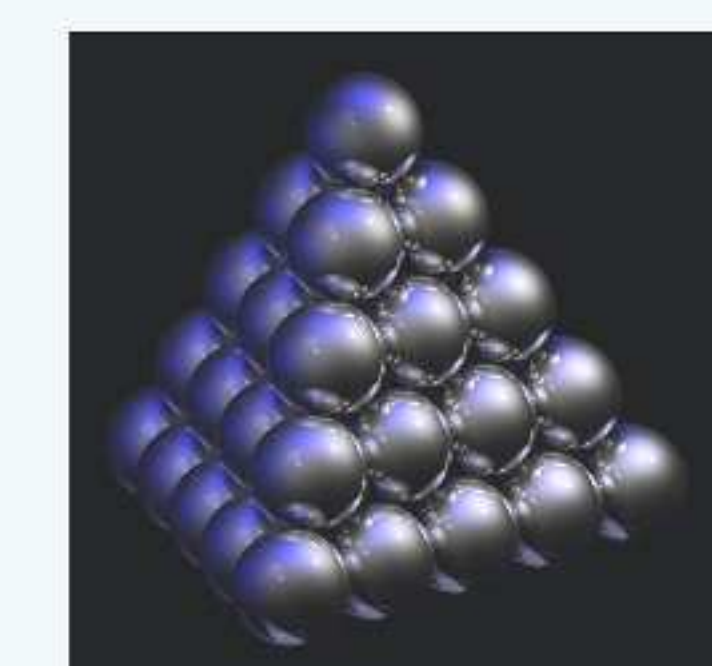
Mejor apilamiento de esferas:

Las 240 vértices viven en la 7-esfera de radio $\sqrt{2}$. Si en cada vértice centramos una 7-esfera de radio $\sqrt{2}/2$ obtenemos una configuración que da la solución al llamado "kissing number" en dimensión 8. Es decir, 240 es el mayor número de esferas que podemos colocar "besando" o siendo tangente a una central. Por otro lado, el retículo que genera esta configuración en \mathbb{R}^8 proporciona también el apilamiento más denso de 7-esferas.

Un poco de historia:

Thorald Gosset describe este politopo por primera vez, en el año 1900, como una figura 8-oica semi-regular. En 1912, E. L. Elte lo renombra en su lista como V_{240} , por tener 240 vértices. En 1973, H.S.M. Coxeter lo denomina politopo 421 en referencia a su diagrama de Coxeter-Dynkin. Actualmente se le conoce también como politopo E8 porque sus vértices constituyen el sistema de raíces del grupo de Lie excepcional E8. El grupo de simetrías de este politopo tiene orden 696.729.600. ¡Se trata pues de un objeto extraordinariamente simétrico!

E8 aparece en propuestas recientes a una posible teoría cuántica de la gravedad, que unificaría las 4 fuerzas fundamentales de la Física.



Apilamiento más denso de 2-esferas. Fuente: wikipedia

Fases de la construcción

