Trivialidad topológica de familias de gérmenes de aplicación finitamente determinados de R^2 en R^2

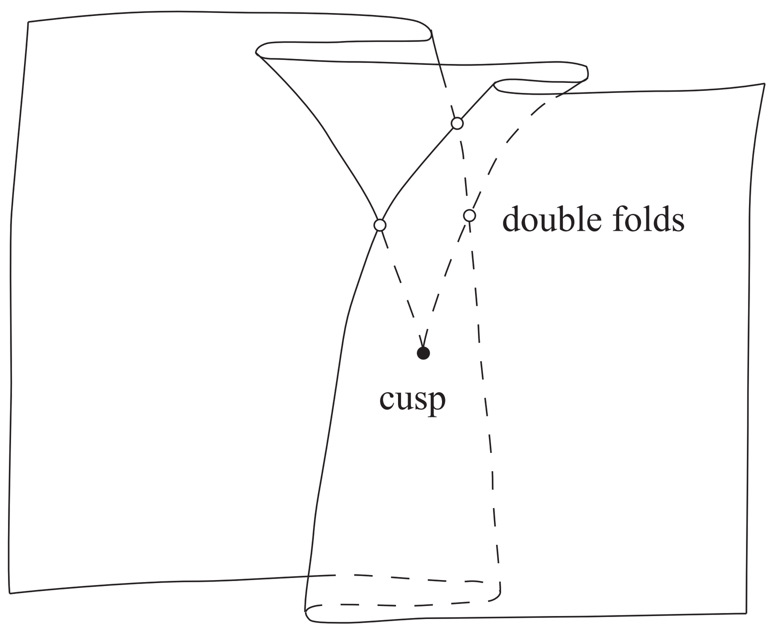
Juan Antonio Moya Pérez
(Universitat de València)

1. Aplicaciones estables y gérmenes de aplicación finitamente determinados de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Definición .- Sean $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dos gérmenes.

1. Diremos f y g son *topológicamente equivalentes* si existen gérmenes de homeomorfismo $\phi, \psi : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tales que $g = \psi \cdot f \cdot \phi^{-1}$
2. Diremos que f y g son *$\mathcal{A}$- equivalentes* si existen gérmenes de difeomorfismo $\alpha, \beta : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tales que $g = \beta \cdot f \cdot \alpha^{-1}$

Definición.- Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Diremos que f es *estable* si existe un entorno W_f de f en $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ con la topología C^∞ de Whitney tal que cada f' en W_f es equivalente a f.



Teorema (Whitney).- Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Se tiene que f es *estable* si y sólo si

1. Presenta como únicas singularidades pliegues y cúspides simples
2. $f\ |_{S_{1,0}(f)}$ es una inmersión con puntos dobles transversales.

Teorema (Mather-Gaffney).-Sea $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ un germen finitamente determinado. Entonces existe un representante $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con U suficientemente pequeño, tal que

1. $f^{-1}(0) = \{0\}$
2. Las única singulariades de $f\ |_{U \setminus \{0\}}$ son puntos pliegue y $f\ |_{(U \setminus \{0\}) \cap S_{1,0}(f)}$ es una inmersión inyectiva.

2. El link de un germen

Teorema (Fukuda).-Sea $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ un germen finitamente determinado. Entonces, salvo $\mathcal{A}$- equivalencia, existe un representante $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\epsilon_0 > 0$, tal que, para cualquier ϵ, con $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ se tiene

1. $\widetilde{S}^1_\epsilon = f^{-1}(S^1_\epsilon)$ es difeomorfa a S^1.
2. La aplicación $f\ |_{\widetilde{S}^1_\epsilon} : \widetilde{S}^1_\epsilon \longrightarrow S^1_\epsilon$ es estable, es decir, es una función de Morse con todos los valores críticos distintos.
3. f es topológicamente equivalente al cono de la aplicación $f\ |_{\widetilde{S}^1_\epsilon}$.

Definición ([4]).-Llamaremos *link* de f a la aplicación estable $f\ |_{\widetilde{S}^1_\epsilon} : \widetilde{S}^1_\epsilon \longrightarrow S^1_\epsilon$. Está bien definido, salvo $\mathcal{A}$-equivalencia.

Corolario([4]).- Dos gérmenes finitamente determinados $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ son topológicamente equivalentes si y sólo si sus links asociados son topológicamente equivalentes.

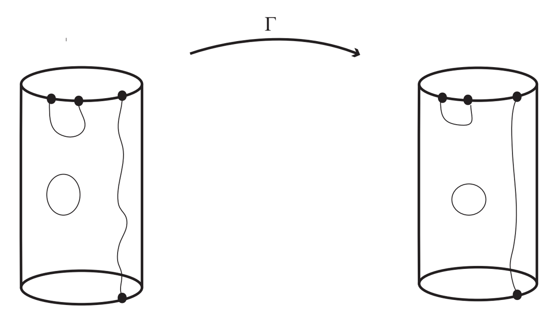
3. Cobordismo de links

Definición.- Dados dos links $\gamma_0, \gamma_1 : S^1 \longrightarrow S^1$, un cobordismo entre γ_0 y γ_1 es una aplicación estable $\Gamma : S^1 \times I \longrightarrow S^1 \times I$, donde $I = [0, 1]$ y tal que para $i = 0, 1$,

$$\Gamma^{-1}(S^1 \times \{i\}) = S^1 \times \{i\},\ \Gamma_{|S^1 \times \{i\}} = \gamma_i \times i$$

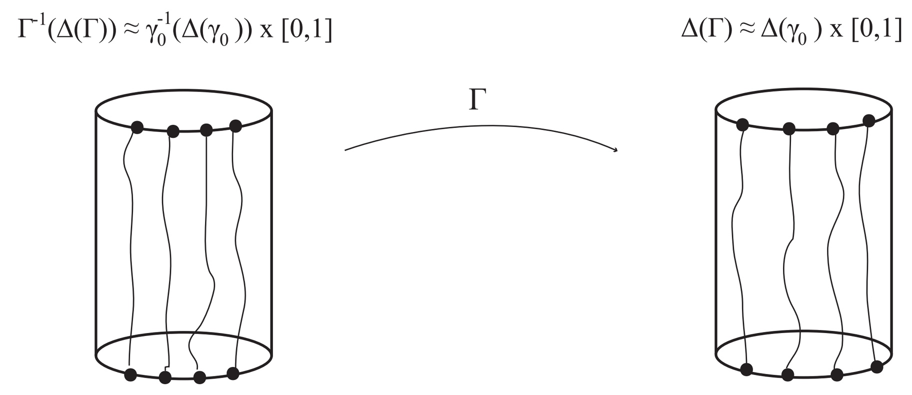
. Supondremos también:

1. Las únicas singularidades de Γ son pliegues
2. $\Gamma_{|S(\Gamma)}$ es una inmersión inyectiva



Definición Diremos que un cobordismo Γ es *trivial* si es $\mathcal{A}$-equivalente al cobordismo producto $\gamma_0 \times id : S^1 \times I \longrightarrow S^1 \times I$ a través de los difeomorfismos $\Phi, \Psi : S^1 \times I \longrightarrow S^1 \times I$ tales que $\Phi_{|S^1 \times \{0\}}, \Psi_{|S^1 \times \{0\}} = id$. En particular, esto implica que γ_0, γ_1 son $\mathcal{A}$- equivalentes.

Lema Sea Γ un cobordismo entre γ_0, γ_1. Si $\Delta(\Gamma)$ es difeomorfo a $\Delta(\gamma_0) \times [0, 1]$, entonces Γ es trivial.



4. Extendiendo la estructura cónica

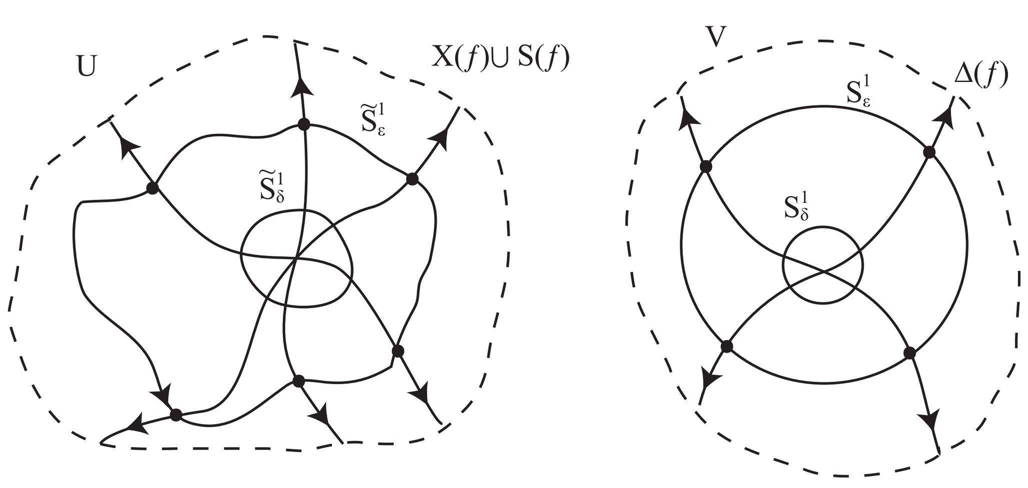
Definición.- Sea $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ un germen. Si denotamos por $S(f)$ su conjunto singular, llamaremos $\Delta(f) = f(S(f))$ y $X(f) = f^{-1}(f(S(f))) \setminus S(f)$

Definición.- Sea $f : U \longrightarrow V$ un representante adecuado de un germen finitamente determinado $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\Delta(f)$ y como consecuencia, $X(f)$ y $S(f)$ son contráctiles. Diremos que $\epsilon > 0$ es un radio *conveniente* para f si se verifican las siguientes condiciones:

1. S^1_ϵ es transversal a la estratificación de f por tipos estables
2. $\widetilde{S}^1_\epsilon$ es difeomorfa a S^1
3. $\widetilde{S}^1_\epsilon$ intersecta $X(f) \cup S(f)$ *adecuadamente*, es decir, $\widetilde{S}^1_\epsilon$ intersecta cada una de las componentes conexas de $(X(f) \cup S(f)) \setminus \{0\}$ exactamente en un punto.

Teorema Sea $f : U \longrightarrow V$ un representante adecuado de un germen finitamente determinado $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\Delta(f) \subset U$ es contráctil y sea $\epsilon > 0$ un radio conveniente para f. Entonces,

1. $f_{|\widetilde{S}^1_\epsilon} : \widetilde{S}^1_\epsilon \longrightarrow S^1_\epsilon$ es $\mathcal{A}$-equivalente al link de f.
2. $f_{|\widetilde{D}^2_\epsilon} : \widetilde{D}^2_\epsilon \longrightarrow D^2_\epsilon$ es topológicamente equivalente al cono de $f_{|\widetilde{S}^1_\epsilon}$.



5. Trivialidad topológica de familias

Dado un germen de aplicación $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$, un desdoblamiento uniparamétrico es un germen de aplicación $F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0)$ de la forma $F(x, t) = (f_t(x), t)$ y tal que $f_0 = f$. Aqui consideraremos los desdoblamientos que conservan el origen, es decir, $f_t(0) = 0$ para cada t. Por tanto, tendremos una familia uniparamétrica de gérmenes de aplicación $f_t : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$.

Definición Sea F un desdoblamiento uniparamétrico de un germen finitamente determinado $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$. Diremos que F es *bueno* si existe un representante $F : U \longrightarrow V \times I$, donde U, V, I son entornos abiertos del origen en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ respectivamente, tal que para cada $t \in I$

1. $f_t^{-1}(0) = 0$
2. $f_t : U_t \setminus \{0\} \longrightarrow V \setminus \{0\}$ es estable, con $U_t = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x, t) \in U\}$

Esto quiere decir que f_t presenta una inestabilidad aislada en el origen “uniformemente”.

Diremos que F es *excelente* si es bueno y además las únicas singularidades de $f_t : U_t \setminus \{0\} \longrightarrow V \setminus \{0\}$ son puntos pliegue y $f_{t|S(f_t) \setminus \{0\}}$ es una inmersión inyectiva para cada $t \in I$.

Definición Sea F un desdoblamiento uniparamétrico de un germen finitamente determinado $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$. Diremos que F es *μ-constante* si el número de Milnor del conjunto de las curvas del discriminante $\Delta(f_t)$ en el origen es independiente de t. Diremos que F es topológicamente trivial si existen gérmenes de homeomorfismo $\Psi, \Phi : (\mathbb{R}^2 \times, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \times, 0)$ que son desdoblamientos de la identidad y $F = \Psi \cdot (id \times f) \cdot \Phi$.

Teorema Sea F un desdoblamiento excelente de un germen finitamente determinado $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$. Si $\Delta(F)$ es topológicamente trivial, entonces F es topológicamente trivial.

Corolario Todo desdoblamiento μ- constante F de un germen finitamente determinado $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ es topológicamente trivial.

Referencias

[1] T. Fukuda, Local topological properties of differentiable mappings I, *Invent. Math.*, **65** (1981/82), 227–250.

[2] T. Fukuda and G. Ishikawa, On the number of cusps of stable perturbations of a plane-to-plane singularity, *Tokyo J.Math.*, **10** (1987), 375–384.

[3] T.Gaffney, Polar multiplicities and equisingularity of map germs, *Topology*, **32**, (1993), 185–223.

[4] W.L. Marar and J.J. Nuño-Ballesteros, The doodle of a finitely determined map germ from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$, *Adv. Math.*, **221** (2009), 1281–1301.

[5] J.A.Moya-Pérez and J.J.Nuño-Ballesteros, The link of a finitely determined map germ from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$, *J. Math. Soc. Japan 62 (2010), No. 4, 1069-1092.*.

[6] J.A.Moya-Pérez and J.J.Nuño-Ballesteros, Topological triviality of families of map germs from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$, *Preprint*.

[7] J.J.Nuño-Ballesteros, Topological triviality of families of map germs from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$, *Preprint*

[8] C.T.C. Wall, Finite determinacy of smooth map germs, *Bull. London. Math. Soc.*, **13** (1981), 481–539.

[9] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane, *Ann. Math. (2)*, **62** (1955), 374–410.