

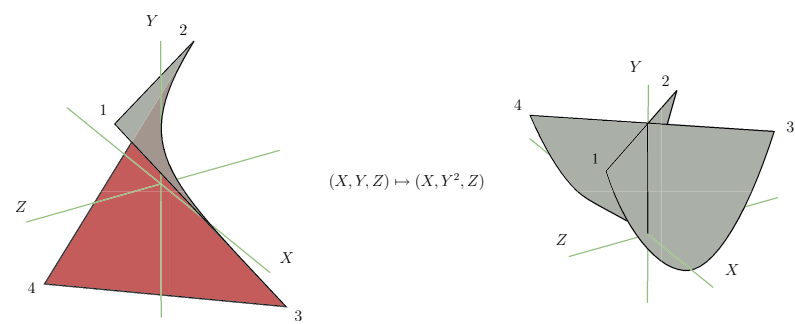
INTRODUCCIÓN

Nuestro objetivo es estudiar un tipo de gérmenes de superficies, los pliegues dobles, que son el ejemplo más sencillo dentro de una familia hasta hace poco no estudiada: los gérmenes de superficies de corranjo 2. En el caso complejo estudiamos sus esquemas de puntos múltiples, mientras que en el caso real profundizamos en su topología, descrita por el estudio de su link.

En [1] D. Mond estudió los gérmenes de superficies complejas $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ de corranjo 1, es decir, aquellos en que la diferencial en 0 tiene rango 1. Estas superficies están clasificadas por \mathcal{A} -equivalencia (difeomorfismos en dominio y codominio) en unas condiciones bastante generales. La familia más sencilla de corranjo 1 la forman los *pliegues*, que son aplicaciones de la forma:

$$(x, y) \mapsto (x, y^2, h(x, y)).$$

Un ejemplo de pliegue es el cross-cap $(x, y) \mapsto (x, y^2, xy)$ que se obtiene “plegando” el paraboloides $(x, y) \mapsto (x, y, xy)$.



El caso de corranjo 2, en el que la diferencial en 0 se anula completamente, está menos estudiado. Podemos obtener gérmenes de corranjo 2 de una manera análoga a la de los pliegues, generando *pliegues dobles*:

$$(x, y) \mapsto (x^2, y^2, h(x, y)).$$

Dado un pliegue doble $(x^2, y^2, h(x, y))$, podemos encontrar una aplicación \mathcal{A} -equivalente de la forma $(x^2, y^2, xp_1(x^2, y^2) + yp_2(x^2, y^2) + xyp_3(x^2, y^2))$. Por simplicidad vamos a restringirnos a pliegues $p_3 = 0$.

$$f(x, y) = (x^2, y^2, xp_1(x^2, y^2) + yp_2(x^2, y^2)).$$

PUNTOS MÚLTIPLES

Seguindo a [2] y [3], el espacio de los puntos de multiplicidad k de f viene definido por el pullback de f de el ideal generado por los menores de tamaño $4 - k$ de la matriz:

$$\begin{bmatrix} -Z & p_1 & p_2 & 0 \\ Xp_1 & -Z & 0 & p_2 \\ Yp_2 & 0 & -Z & p_1 \\ 0 & Yp_2 & Xp_1 & -Z \end{bmatrix}$$

Así, los puntos dobles triples y cuádruples son, respectivamente:

$$f^*M_2 = V((p_1(x^2, y^2)p_2(x^2, y^2))(xp_1(x^2, y^2) + yp_2(x^2, y^2))),$$

$$f^*M_3 = V((p_1(x^2, y^2), p_2(x^2, y^2))^2),$$

$$f^*M_4 = V(p_1(x^2, y^2), p_2(x^2, y^2)).$$

Como la matriz es 4×4 no aparecen puntos de multiplicidad mayor. Notemos que en los pliegues dobles todo punto triple es a su vez punto cuádruple.

EL LINK DE UN PLIEGUE DOBLE

En el caso real, dado un germen de aplicación analítica $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, un conocido teorema de Fukuda [4] asegura que f tiene la estructura del cono de su link, donde el link es la curva que se obtiene al intersectar la imagen de f con una esfera suficientemente pequeña. En el caso de los pliegues dobles es suficiente con intersectar con un plano.

Definición 0.1. Sea $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ un germen finitamente determinado, decimos que $f : U \rightarrow V$ es un *buen representante* si satisface:

$$f^{-1}(0) = \{0\},$$

$$f : U \rightarrow V \text{ es propia, y}$$

$$f : U \setminus \{0\} \rightarrow V \setminus \{0\} \text{ es una inmersión con puntos dobles transversales.}$$

Si denotamos, para cada $a, b, \epsilon > 0$

$$P_\epsilon = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3; aX + bY = \epsilon\},$$

$$H_\epsilon = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq aX + bY < \epsilon\}, \text{ y}$$

$$\tilde{P}_\epsilon = f^{-1}(P_\epsilon), \quad \tilde{H}_\epsilon = f^{-1}(H_\epsilon).$$

entonces tenemos la siguiente adaptación del teorema de Fukuda:

Teorema 0.2. Sea $f : U \rightarrow V$ un buen representante de un pliegue doble f finitamente determinado, entonces existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo ϵ with $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ se tiene:

$$\tilde{P}_\epsilon \text{ es difeomorfo a } S^1,$$

$$f|_{\tilde{P}_\epsilon} : \tilde{P}_\epsilon \rightarrow P_\epsilon \text{ es una inmersión con cruzamientos normales}$$

$$f|_{\tilde{H}_\epsilon} : \tilde{H}_\epsilon \rightarrow H_\epsilon \text{ es topológicamente equivalente al cono de } f|_{\tilde{P}_\epsilon}.$$

Usando este teorema es fácil ver que el link de un pliegue doble se puede parametrizar como:

$$L(t) = (\sin^2(t), \cos(t)p_1(S(t)) + \sin(t)p_2(S(t))),$$

con $S(t) = ((\epsilon \cos(t))^2, (\epsilon \sin(t))^2)$ y ϵ suficientemente pequeño.

Con esta información podemos determinar la topología del germen así como la presencia de singularidades, por ejemplo:

$$L(0), L(\pi) \text{ singulares} \iff p_2(x, 0) \equiv 0,$$

$$L(\pi/2), L(3\pi/2) \text{ singulares} \iff p_1(0, y) \equiv 0.$$

Dividiendo $C(t)$ en cuatro regiones A, B, C y D , dadas por la división del dominio en las regiones $[0, \pi/2], [\pi/2, \pi], [\pi, 3\pi/2]$ y $[3\pi/2, 2\pi]$ respectivamente, tenemos que los puntos dobles en $A \cap D$ o $B \cap C$ están determinados exclusivamente por p_1 , así como los de $A \cap B$ o $C \cap D$ lo están por p_2 . Sin embargo, los puntos dobles en $A \cap C$ y $B \cap D$ dependen simultáneamente de p_1 y p_2 .

EJEMPLOS

Si tomamos el pliegue doble:

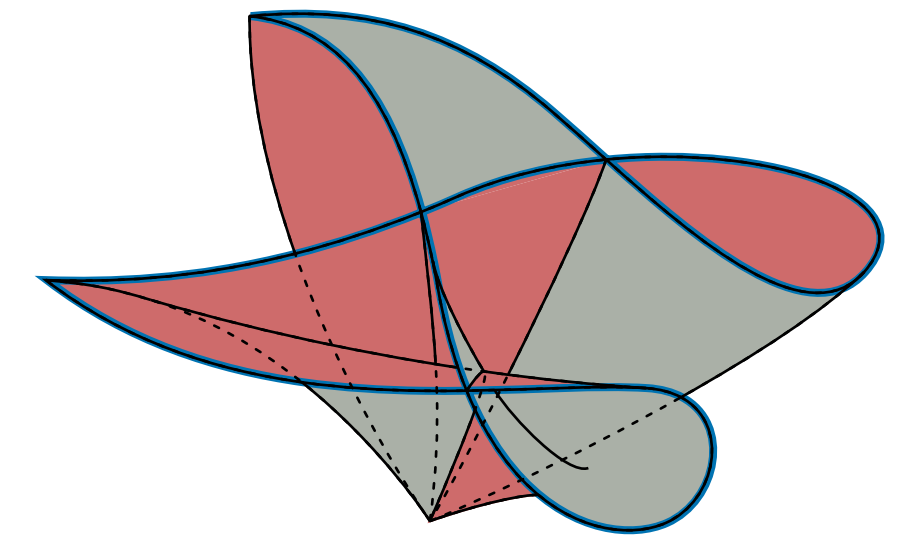
$$(x, y) \mapsto (x^2, y^2, x^5 + 2x^3y^2 + 2x^2y^3 - 2xy^4 + y^5).$$

tenemos:

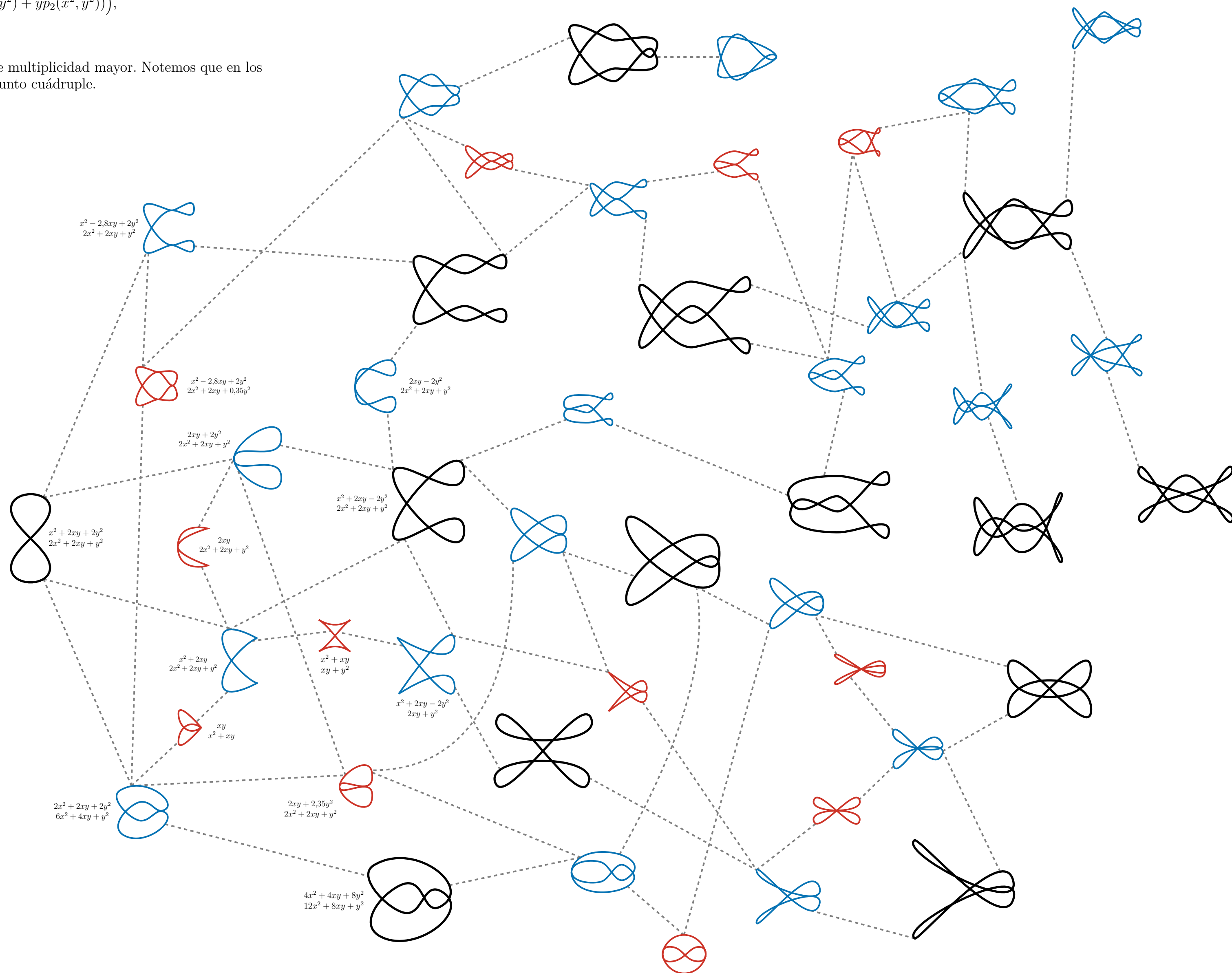
$$p_1(x, y) = x^2 + 2xy - 2y^2,$$

$$p_2(x, y) = 2xy + y^2.$$

Podemos apreciar la estructura cónica con el link remarcado en azul, así como los dos ejes cuspidales que aparecen por ser $p_2(x, 0) = 0$. Aparecen tres ramas de puntos dobles de las cuales las laterales dependen de p_1 mientras que la central depende de la relación entre p_1 y p_2 .



En la figura de abajo mostramos las adyacencias entre distintos links de double folds obtenidos con p_1, p_2 polinomios homogéneos de grado 2. Las curvas negras representan links estables, mientras que las azules representan fenómenos inestables que se encuentran entre los links negros con los que están unidas, así como las rojas representan singularidades todavía más inestables que se encuentran entre links azules adyacentes. Los polinomios que aparecen en la imagen son los p_1 y p_2 con los que se obtiene la curva que acompañan.



[1] Mond, D. *On the classification of germs of maps from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R}^3* . Proc. London Math. Soc. (3) 50 (1985), no. 2, 333–369.

[2] Mond, D; Pellikaan, R. *Fitting ideals and multiple points of analytic mappings*. Algebraic geometry and complex analysis (Pátzcuaro, 1987), 107–161, Lecture Notes in Math., 1414, Springer, Berlin, 1989.

[3] Marar, W. L.; Nuño-Ballesteros, J. J. *A note on finite determinacy for corank 2 map germs from surfaces to 3-space*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 145 (2008), no. 1, 153–163.

[4] T. Fukuda, *Local topological properties of differentiable mappings I*. Invent. Math. 65 (1981/82), 227–250.