Teoremas de colímite homotópico para categorías estructuradas

Introducción

La construcción de Grothendieck $\int_{\mathcal{I}} \mathcal{C}$ de la categoría asociada a un diagrama $\mathcal{C} : \mathcal{I}^{op} \to Cat$ ha sido recientemente extendida en [2] al contexto de bicategorías. Esto ha permitido entonces demostrar en [2], para diagramas de bicategorías, una extensión del conocido teorema de colímite homotópico de Thomason [4]. Puesto que una categoría monoidal puede ser mirada como una bicategoría con un solo objeto, la citada extensión del teorema de colímite homotópico puede ser adaptada a un correspondiente teorema para categorías monoidales. En este teorema, el tipo de homotopía del diagrama de categorías monoidales puede ser controlado por el nervio del funtor que define. Este resultado sugiere entonces la extensión del teorema para categorías monoidales trenzadas mediante la noción de nervio de un pseudofuntor con rango la 2-categoría de categorías monoidales trenzadas [3, 1]. Estos resultados son los que pretendemos reflejar en este póster.

Preliminares

El teorema del colímite homotópico de Thomason [4] afirma que para cada diagrama $\mathcal{C} : \mathcal{I}^{op} \to Cat$, existe una equivalencia homotópica débil natural de conjuntos simpliciales

$$hocolim_{\mathcal{I}} Ner\, \mathcal{C} \simeq Ner \int_{\mathcal{I}} \mathcal{C}$$

donde $Ner : Cat \to SimpSets$ es el funtor nervio de Grothendieck y $\int_{\mathcal{I}} \mathcal{C}$ es la categoría dada por la construcción de Grothendieck asociada al diagrama. Esta construcción ha sido extendida en [2] al caso de partir de un diagrama de bicategorías, esto es, un funtor $\mathcal{C} : \mathcal{I}^{op} \to Bicat$ donde $Bicat$ es la categoría de bicategorías y homomorfismos entre ellas. Dicha construcción generalizada asocia a $\mathcal{C}$ la bicategoría $\int_{\mathcal{I}} \mathcal{C}$ cuyos objetos son los pares (x, i) donde i es un objeto de $\mathcal{I}$ y x es un objeto de la bicategoría $\mathcal{C}_i$, sus morfismos $(u, a) : (y, j) \to (x, i)$ son pares de morfismos tales que $a : j \to i$ es un morfismo en $\mathcal{I}$ y $u : y \to a^* x$ es un morfismo en $\mathcal{C}_j$ y una 2-celda $(\alpha, a) : (u, a) \to (u', a)$ consiste en una 2-celda $\alpha : u \Rightarrow u'$ en $\mathcal{C}_j$.

El nervio geométrico de una bicategoría $\mathcal{A}$, $\Delta\mathcal{A}$, es el conjunto simplicial cuyos p-símplices son los funtores laxos $F : [p] \rightsquigarrow \mathcal{A}$. Se tiene entonces [2]:

Teorema del colímite homotópico para bicategorías: "Para cada diagrama $\mathcal{C} : \mathcal{I}^{op} \to Bicat$ de bicategorías existe una equivalencia homotópica débil natural de conjuntos simpliciales:

$$\eta : hocolim_{\mathcal{I}} \Delta\mathcal{C} \to \Delta \int_{\mathcal{I}} \mathcal{C}$$

donde $\Delta\mathcal{C} : \mathcal{I}^{op} \to SimpSets$ es el diagrama de conjuntos simpliciales obtenido por la composición de $\mathcal{C}$ con el funtor nervio geométrico."

Se tiene así que el espacio clasificador de la bicategoría $\int_{\mathcal{I}} \mathcal{C}$ puede ser pensado como el colímite homotópico de los espacios clasificadores de las bicategorías $\mathcal{C}_i$ que son datos del diagrama.

Contacto

Rocío Pérez Martínez
Departamento de Álgebra Universidad de Granada
Con el soporte del proyecto MTM2007-6543
rocio_pm@ugr.es

Categorías monoidales

Una categoría monoidal $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \otimes, a, I, l, r)$ puede ser mirada como una bicategoría con un solo objeto $*$, en la que los morfismos son los objetos de $\mathcal{M}$ y las 2-celdas son los morfismos de $\mathcal{M}$ y en la que la composición horizontal está dada por el funtor $\otimes$ de $\mathcal{M}$.

De esta forma un diagrama de categorías monoidales $\mathbb{G} : \mathcal{I}^{op} \to MonCat \subset Bicat$ puede ser visto como un diagrama de bicategorías y podemos considerar el nervio geométrico de la bicategoría construcción de Grothendieck asociada a este diagrama, $\Delta \int_{\mathcal{I}} \mathbb{G}$.

Por otro lado, un diagrama $\mathbb{G}$ de categorías monoidales es un caso particular de la noción de pseudofuntor de categorías monoidales, esto es, de un pseudofuntor $\mathbb{G} : \mathcal{I} \rightsquigarrow MonCat$ donde $\mathcal{I}$ es cualquier categoría pequeña (vista como una 2-categoría en la que las 2-celdas son identidades) y $MonCat$ denota la 2-categoría de categoría monoidales.

Para este tipo de pseudofuntores existe una noción de nervio (véase [3]) dado por el conjunto simplicial cuyos n-símplices $Ner_{\mathcal{I}} \mathbb{G}_n = Z^2([n], \sigma^* \mathbb{G})$ donde $\sigma : [n] \to \mathcal{I}$ es un funtor y $Z^2([n], \sigma^* \mathbb{G})$ es el conjunto de 2-cociclos de $[n]$ con coeficientes en el pseudofuntor composición $[n] \xrightarrow{\sigma} \mathcal{I} \overset{\mathbb{G}}{\rightsquigarrow} MonCat$.

Si $\mathbb{G} : \mathcal{I}^{op} \to MonCat$ es un diagrama de categorías monoidales podemos entonces considerar su nervio $Ner_{\mathcal{I}} \mathbb{G}$ y de hecho se tiene que

$$Ner_{\mathcal{I}} \mathbb{G} = \Delta \textstyle\int_{\mathcal{I}} \mathbb{G}$$

Usando ahora el teorema del colímite homotópico para bicategorías sabemos que existe una equivalencia homotópica débil natural

$$\eta : \Delta \int_{\mathcal{I}} \mathbb{G} \xrightarrow{\sim} hocolim_{\mathcal{I}} \Delta\mathbb{G}$$

y el siguiente teorema permite entonces asegurar que la realización de $Ner_{\mathcal{I}} \mathbb{G}$ puede ser pensada como el colímite homotópico de los espacios clasificadores de las categorías monoidales $\mathbb{G}_i$ dadas por el diagrama.

Teorema del colímite homotópico para categorías monoidales: "Para cada diagrama de categorías monoidales $\mathbb{G} : \mathcal{I}^{op} \to MonCat$ existe una equivalencia homotópica débil natural de conjuntos simpliciales

$$\eta : hocolim_{\mathcal{I}} \Delta\mathbb{G} \to Ner_{\mathcal{I}} \mathbb{G}$$

donde $\Delta\mathbb{G} : \mathcal{I}^{op} \to SimpSet$ es el diagrama de conjuntos simpliciales obtenido por la composición de $\mathbb{G}$ con el funtor $\Delta : Bicat \to SimpSet$ nervio geométrico ."

Categorías monoidales trenzadas

Una categoría monoidal trenzada, $(\mathcal{M}, \otimes, c)$, es una categoría monoidal en la que hay un trenzamiento, esto es, una familia de isomorfismos naturales $c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$, $X, Y \in \mathcal{M}$, verificando oportunas condiciones de coherencia. Denotamos $BrMonCat$ a la 2-categoría de categorías monoidales trenzadas.

El nervio geométrico de una categoría monoidal trenzada $(\mathcal{M}, \otimes, c)$ es el conjunto simplicial cuyos n-símplices $Ner(\mathcal{M}, \otimes, c)_n = Z^3([n], (\mathcal{M}, \otimes, c))$ donde $Z^3([n], (\mathcal{M}, \otimes, c))$ es el conjunto de 3-cociclos de la categoría $[n]$ en la categoría monoidal trenzada $(\mathcal{M}, \otimes, c)$ (véase [3]).

Si $\mathbb{G} : \mathcal{I}^{op} \to BrMonCat$ es un diagrama de categorías monoidales trenzadas entonces tenemos un diagrama de conjuntos simpliciales

$$\mathcal{I}^{op} \xrightarrow{\mathbb{G}} BrMonCat \xrightarrow{Ner} SimpSets$$

del que podemos considerar su colímite homotópico $hocolim_{\mathcal{I}} Ner\, \mathbb{G}$.

Un diagrama de categorías monoidales trenzadas proporciona un ejemplo de la noción de pseudofuntor de categorías monoidales trenzadas, esto es de $\mathbb{G} : \mathcal{I} \rightsquigarrow BrMonCat$ donde $\mathcal{I}$ es cualquier categoría pequeña (vista como una 2-categoría en la que las 2-celdas son identidades). El nervio de un tal pseudofuntor $\mathbb{G}$ está dado (véase [3]) por el conjunto simplicial cuyos n-símplices $Ner_{\mathcal{I}} \mathbb{G}_n = Z^3([n], \sigma^* \mathbb{G})$ donde $\sigma : [n] \to \mathcal{I}$ es un funtor y $Z^3([n], \sigma^* \mathbb{G})$ es el conjunto de 3-cociclos de $[n]$ con coeficientes en el pseudofuntor composición $[n] \xrightarrow{\sigma} \mathcal{I} \overset{\mathbb{G}}{\rightsquigarrow} BrMonCat$.

En particular, si $\mathbb{G}$ es un diagrama de categorías monoidales trenzadas, podemos considerar su nervio $Ner_{\mathcal{I}} \mathbb{G}$ y entonces tenemos:

Teorema del colímite homotópico para categorías monoidales trenzadas: "Supongamos que $\mathbb{G} : \mathcal{I}^{op} \to BrMonCat$ es un diagrama de categorías monoidales trenzadas. Entonces existe una equivalencia homotópica débil natural de conjuntos simpliciales

$$\eta : hocolim_I Ner\, \mathbb{G} \to Ner_I \mathbb{G}$$

donde $Ner\, \mathbb{G} : \Delta^{op} \to SimpSets$ es el diagrama de conjuntos simpliciales obtenido por la composición de $\mathbb{G}$ con el funtor nervio geométrico de categorías monoidales trenzadas."

Se tiene así que la realización de $Ner_I \mathbb{G}$ puede ser mirada como el colímite homotópico de los espacios clasificadores de las categorías monoidales trenzadas $\mathbb{G}_i$ dadas por los datos iniciales.

Referencias

[1] P. Carrasco, A.M. Cegarra, and A.R. Garzón. Classifying spaces for braided monoidal categories and lax diagrams of bicategories. *Advances in Mathematics*, 226:419–483, 2011.

[2] Pilar Carrasco, Antonio M. Cegarra, and Antonio R. Garzón. Nerves and classifying spaces for bicategories. *Algebr. Geom. Topol.*, 10(1):219–274, 2010.

[3] A. M. Cegarra and E. Khmaladze. Homotopy classification of graded Picard categories. *Adv. Math.*, 213(2):644–686, 2007.

[4] R. W. Thomason. Homotopy colimits in the category of small categories. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 85(1):91–109, 1979.